Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA-1111)
Septiembre-Diciembre 2007

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

1^{er} Examen Departamental (35 %)
Duración: 1h 50min
Tipo F2

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Calcule los siguientes límites y en caso que alguno no exista explique porqué no.

(a) (4 puntos) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \csc t$

(b) (5 puntos) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

(c) (5 puntos) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x)$

Pregunta 2. (10 puntos) Estudie la continuidad de la siguiente función en $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{16x}{\pi^2} & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{4} \\ \cos(x) - \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ x^3 + \sqrt{x} + 4 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Pregunta 3. (5 puntos) Se sabe que la función f satisface que

$$5x - 3 < f(x) < \sqrt{\frac{4x}{3}} + 2x + 4$$

para x en $(0,5) \setminus \{3\}$. Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$.

Pregunta 4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \arctan(x) + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) (1 puntos) Grafique f.

(b) (2 puntos) Determine si f es inyectiva

(c) (3 puntos) En el caso que f sea inyectiva, encuentre su inversa.

Soluciones

1) (a)

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t}\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}\frac{t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen}(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\frac{1+\cos(t)}{1+\cos(t)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2(t)}{t^2(1+\cos(t))} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos(t)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(b) Por un lado,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{-x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x} = -\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$ no existe pues los límites laterales son diferentes (uno existe y el otro no).

(c) Sea $L = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x+3}-2x)$. Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{4x^2-x+3}+2x$, entonces

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x+3}-2x)\frac{\sqrt{4x^2-x+3}+2x}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x+3}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+3-4x^2}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x}.
\end{aligned}
$$

Multiplicamos y dividimos por $\frac{1}{x}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}(-x+3)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{4x^2-x+3}+2x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}}\sqrt{4x^2-x+3}+2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}(4x^2-x+3)}+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(-1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\lim_{x\to\infty}2} = \frac{-1}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

2) Estudiamos la continuidad de f en $x=-\frac{\pi}{4}$ y $x=0$. Comenzamos con $x=-\frac{\pi}{4}$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{16x}{\pi^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{16(-\frac{\pi}{4})}{\pi^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{\pi}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} \cos(x) - \frac{\tan(x)}{x} = \cos(-\frac{\pi}{4}) - \frac{\tan(-\frac{\pi}{4})}{-\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\left(-\frac{4}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{\pi}$, además como $f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{16(-\frac{\pi}{4})}{\pi^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{\pi}$, tenemos que f es continua en $x = -\frac{\pi}{4}$. Ahora trabajamos con $x = 0$. Calculamos los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \cos(x) - \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \cos(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} \\ &= \cos(0) - 1\frac{1}{\cos(0)} = 1 - 1 = 0,\end{aligned}$$

donde en la línea anterior usamos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^3 + \sqrt{x} + 4) = 0^3 + \sqrt{0} + 4 = 4.$$

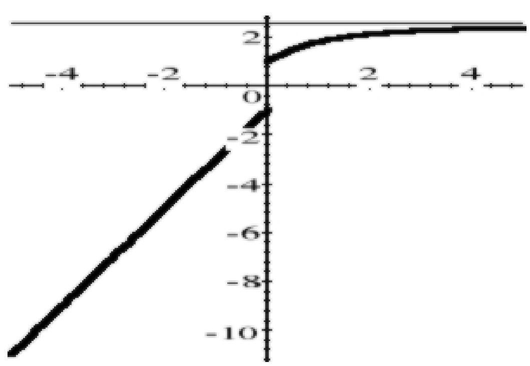
Como los límites laterales de f cuando x tiende a cero son distintos, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, y por lo tando f no es continua en $x = 0$.

3) Tenemos que $\lim_{x\to 5} 5x - 3 = 12 = \lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{4x}{3}} + 2x + 4$ y para $(0,5) \setminus \{3\}$

$$5x - 3 < f(x) < \sqrt{\frac{4x}{3}} + 2x + 4,$$

entonces por el Teorema del Sandwich tenemos $\lim_{x\to 3} f(x) = 12$.

4) (a) Graficamos f



(b) De la gráfica se puede ver que f es inyectiva (la función es estrictamente creciente o también se ve que cualquier recta horizontal intersecta a la gráfica en a lo más un punto).

También se puede argumentar que tanto la función $g_1(x) = 2x - 1$ como la función $g_2(x) = \arctan(x)$ son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$, y por lo tanto para $x \in (-\infty, 0)$ la función $f(x) = 2x - 1$ es estrictamente creciente y para $x \in [0, \infty)$ la función $f(x) = \arctan(x) + 1$ es estrictamente creciente. Falta ver que ocurre si $x_1 < 0 \leq x_2$. Como $f(x_1) = 2x - 1 < 0$ para $x_1 \in (-\infty, 0)$ y $f(x_2) = \arctan(x_2) + 1 > 0$ para $x_2 \in [0, \infty)$, tenemos que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Por lo que f es escrictamente creciente en $\mathbb{R}$

(c) Queremos despejar x de la ecuación $y = f(x)$. Como la función h está definida a trozos, consideramos dos casos.

(I) $x < 0$
En este caso tenemos que resolver $y = 2x - 1$. Por lo tanto $x = \frac{y+1}{2}$. Es decir, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$. Esta fórmula va a ser válida para la imagen de f cuando $x < 0$ y esto es el conjunto $(-\infty, -1)$ (esto se puede ver en la gráfica).

(II) $x \geq 0$
En este caso tenemos que resolver $y = \arctan(x) + 1$. Por lo tanto $x = \tan y - 1$. Es decir, $f^{-1}(x) = \tan(x - 1)$. Está fórmula va a ser válida para la imagen de f cuando $x \geq 0$ y esto es el conjunto $[1, \frac{\pi}{2} + 1)$ (ya que la imagen de la arcotangente cuando el dominio es $[0, \infty)$ es el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$).

Entonces

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < -1 \\ \tan x - 1 & \text{si } 1 \leq x < \frac{\pi}{2} + 1 \end{cases}$$